Travaux Dirigés

Mécanique *Newtonienne*

Torseur des actions mécaniques

Travaux Dirigés TD04CV15juinC

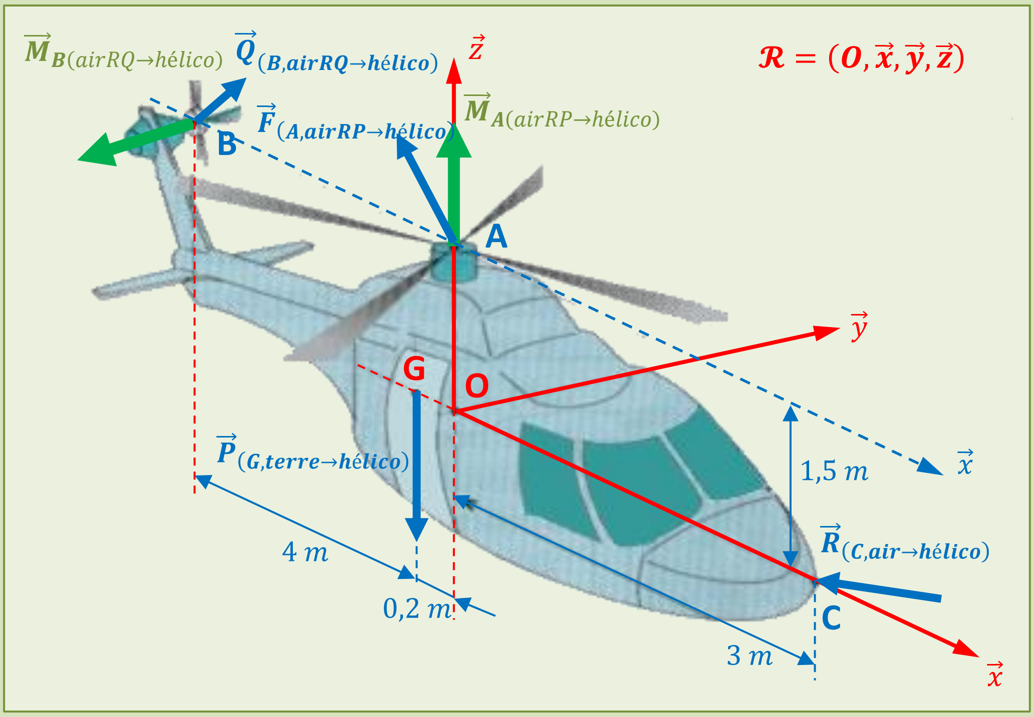
Écriture des torseurs

Enseignement de Spécialité Sciences de l'Ingénieur

Thématique *Agir sur son Environnement*

Enseignement de Spécialité Sciences de l'Ingénieur
LYCEE PAPE-CLEMENT - PESSAC

Exercice n°1



Un hélicoptère évolue horizontalement à vitesse constante.

On isole l'hélicoptère et on exprime les actions mécaniques extérieures :

- L'action mécanique de l'air sur le rotor principal de l'hélicoptère :

$$\vec{F}_{(A,airRP\to hélico)} = \begin{pmatrix} 402 \\ -9{,}5 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

- L'action mécanique de l'air sur le rotor de queue de l'hélicoptère :

$$\vec{Q}_{(B,airRQ\to hélico)} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}$$

- L'action mécanique de l'air sur la carlingue de l'hélicoptère :

$$\vec{R}_{(C,air\to hélico)} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}$$

- L'action mécanique de la pesanteur sur l'hélicoptère :

$$\vec{P}_{(G,terre\to hélico)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_z \end{pmatrix}$$

On donne également :

- La masse de l'hélicoptère : $m = 3000\ kg$
- Le module du moment par rapport au point A des efforts de l'air sur l'hélicoptère :
$$\left\|\vec{M}_{A(airRP\to hélico)}\right\| = 108\ Nm$$
- Le module du moment par rapport au point B des efforts de l'air sur l'hélicoptère :
$$\left\|\vec{M}_{B(airRQ\to hélico)}\right\| = 30\ Nm$$
- Le module de l'action mécanique de l'air sur l'hélicoptère : $\left\|\vec{R}_{(C,air\to hélico)}\right\| = 402\ daN$
- Le module de l'action mécanique de l'air sur le rotor de queue de l'hélicoptère : $\left\|\vec{Q}_{(B,airRQ\to hélico)}\right\| = 9{,}5\ daN$

L'objectif de cet exercice est de vérifier si le recensement de toutes les forces extérieures tel qu'il est fait dans cet exercice, permet d'obtenir l'équilibre aérodynamique de l'hélicoptère.

Rappel : l'utilisation de l'outil mathématique TORSEUR permet de représenter analytiquement une action mécanique. L'hélicoptère subit plusieurs actions mécaniques extérieures (forces et moments) et pour exprimer les torseurs de chaque action, on décide de la convention d'écriture suivante :

Exemple : $\{t_{airRP\rightarrow hélico}\}_A$ représente, avec l'écriture d'un torseur, l'action mécanique au point A de l'air du rotor principal (RP) sur l'hélicoptère. Le référentiel est omis car il sera inchangé.

Démarche : Chaque action mécanique est écrite sous la forme d'un torseur exprimé au point où l'action mécanique est réalisée.

Question n°1 :

- **Compléter,** dans le repère $(\mathcal{R})$, le torseur mécanique au point A de l'action de l'air sur le rotor principal de l'hélicoptère noté $\{t_{airRP\rightarrow hélico}\}_A$. Le torseur sera écrit avec ses éléments de réduction et ensuite avec ses composantes.

$$\{t_{airRP\rightarrow hélico}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{F}_{(A,airRP\rightarrow hélico)} \\ \vec{M}_{A(airRP\rightarrow hélico)} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = {}_A\begin{Bmatrix} 402 & 0 \\ -9{,}5 & 0 \\ 3000 & N_{airRP\rightarrow hélico} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- **Expliquer** pourquoi les composantes du vecteur $\vec{M}_{A(\vec{F}_{airRP\rightarrow hélico})}$ ne sont pas nulles.

D'après l'énoncé, il existe un moment par rapport à ce point qui est non nul. Seule sa norme est donnée dans l'énoncé ($\left\|\vec{M}_{A(airRP\rightarrow hélico)}\right\| = 108\ Nm$)

Question n°2 :

- **Compléter,** dans le repère $(\mathcal{R})$, le torseur mécanique au point B de l'action de l'air sur le rotor de queue de l'hélicoptère noté $\{t_{airRQ\rightarrow hélico}\}_B$. Le torseur sera écrit avec ses éléments de réduction et ensuite avec ses composantes.

$$\{t_{airRQ\rightarrow hélico}\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{Q}_{(B,airRQ\rightarrow hélico)} \\ \vec{M}_{B(airRQ\rightarrow hélico)} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = {}_B\begin{Bmatrix} Q_x & 0 \\ Q_y & M_{airRQ\rightarrow hélico} \\ Q_z & 0 \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Question n°3 :

- **Compléter,** dans le repère $(\mathcal{R})$, le torseur mécanique au point C de l'action de l'air sur l'hélicoptère noté $\{t_{air\rightarrow hélico}\}_C$. Le torseur sera écrit avec ses éléments de réduction et ensuite avec ses composantes.

$$\{t_{air\rightarrow hélico}\}_C = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(C,air\rightarrow hélico)} \\ \vec{M}_{C(\vec{R}_{air\rightarrow hélico})} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = {}_C\begin{Bmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Question n°4 :

- **Compléter,** dans le repère $(\mathcal{R})$, le torseur mécanique au point G de l'action de la pesanteur sur l'hélicoptère noté $\{t_{terre\rightarrow hélico}\}_G$. Le torseur sera écrit avec ses éléments de réduction et ensuite avec ses composantes. On utilisera la variable g pour exprimer l'accélération de pesanteur et on prendra $g = 10\ m.s^{-2}$

$$\{t_{terre\rightarrow hélico}\}_G = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{P}_{(G,terre\rightarrow hélico)} \\ \vec{M}_{G(\vec{P}_{terre\rightarrow hélico})} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Question n°5 :

- **Écrire** le torseur $\{t_{airRP\to hélico}\}$ au point G en utilisant la formule de Varignon.

D'après la formule de Varignon :

$$\{t_{airRP\to hélico}\}_G = \underset{G}{\begin{Bmatrix} \vec{F}_{(A,airRP\to hélico)} \\ \vec{M}_{A(airRP\to hélico)+\overrightarrow{GA}\wedge\vec{F}_{(A,airRP\to hélico)}} \end{Bmatrix}}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Calculons $\vec{M}_{A(airRP\to hélico)+\overrightarrow{GA}\wedge\vec{F}_{(A,airRP\to hélico)}}$:

$$\vec{M}_{A(airRP\to hélico)+\overrightarrow{GA}\wedge\vec{F}_{(A,airRP\to hélico)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{airRP\to hélico} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 402 \\ -9{,}5 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}5\times 1{,}5 \\ (402\times 1{,}5)-(0{,}2\times 3000) \\ -9{,}5\times 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\vec{M}_{A(airRP\to hélico)+\overrightarrow{GA}\wedge\vec{F}_{(A,airRP\to hélico)}} = \begin{pmatrix} 14{,}25 \\ 3 \\ N_{airRP\to hélico} - 1{,}9 \end{pmatrix}$

Écrivons le torseur avec ses composantes : $\{t_{airRP\to hélico}\}_G = \begin{Bmatrix} 402 & 14{,}25 \\ -9{,}5 & 3 \\ 3000 & N_{airRP\to hélico} - 1{,}9 \end{Bmatrix}$

Question n°6 :

- **Déplacer** également les torseurs $\{t_{airRQ\to hélico}\}$ et $\{t_{air\to hélico}\}$ au point G en utilisant de nouveau la formule de Varignon.

$$\{t_{airRQ\to hélico}\}_G = \underset{G}{\begin{Bmatrix} \vec{Q}_{(B,airRQ\to hélico)} \\ \vec{M}_{B(airRQ\to hélico)+\overrightarrow{GB}\wedge\vec{Q}_{(B,airRQ\to hélico)}} \end{Bmatrix}}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Calculons $\vec{M}_{B(airRQ\to hélico)+\overrightarrow{GB}\wedge\vec{Q}_{(B,airRQ\to hélico)}}$:

$$\vec{M}_{B(airRQ\to hélico)+\overrightarrow{GB}\wedge\vec{Q}_{(B,airRQ\to hélico)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_{airRQ\to hélico} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5Q_y \\ 1{,}5Q_x + 4Q_z \\ -4Q_y \end{pmatrix}$$

Écrivons le torseur avec ses composantes : $\{t_{airRQ\to hélico}\}_G = \begin{Bmatrix} Q_x & -1{,}5Q_y \\ Q_y & M_{airRQ\to hélico} + 1{,}5Q_x + 4Q_z \\ Q_z & -4Q_y \end{Bmatrix}$

$$\{t_{air\to hélico}\}_G = \underset{G}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(C,air\to hélico)} \\ \vec{M}_{C(\vec{R}_{air\to hélico})+\overrightarrow{GC}\wedge\vec{R}_{(C,air\to hélico)}} \end{Bmatrix}}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Calculons $\vec{M}_{C(\vec{R}_{air\to hélico})+\overrightarrow{GC}\wedge\vec{R}_{(C,air\to hélico)}}$:

$$\vec{M}_{C(\vec{R}_{air\to hélico})+\overrightarrow{GC}\wedge\vec{R}_{(C,air\to hélico)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3{,}2R_z \\ 3{,}2R_y \end{pmatrix}$$

Écrivons le torseur avec ses composantes : $\{t_{airRQ\to hélico}\}_G = \begin{Bmatrix} R_x & 0 \\ R_y & -3{,}2R_z \\ R_z & 3{,}2R_y \end{Bmatrix}$

On admet que l'équilibre aérodynamique est atteint lorsque le torseur au point G de toutes les forces extérieures à l'hélicoptère est nul : $\{t_{Ext\to hélico}\}_G = \{0\}$

Question n°7 :

- **Calculer** le torseur $\{t_{Ext\to hélico}\}_G$ (il s'agit d'additionner tous les torseurs en ce point) et **exprimer** les 6 équations qui caractérisent l'équilibre aérodynamique.

D'après le cours, il est possible d'ajouter les torseurs lorsque ceux-ci sont exprimés au même point.

Ainsi :

$$\{t_{Ext\to hélico}\}_G = \{t_{airRP\to hélico}\}_G + \{t_{airRQ\to hélico}\}_G + \{t_{airRQ\to hélico}\}_G + \{t_{terre\to hélico}\}_G$$

Écrivons cette équation avec les composantes des torseurs :

$$\{t_{Ext\to hélico}\}_G = \begin{Bmatrix} 402 & 14{,}25 \\ -9{,}5 & 3 \\ 3000 & N_{airRP\to hélico} - 1{,}9 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_x & -1{,}5Q_y \\ Q_y & M_{airRQ\to hélico} + 1{,}5Q_x + 4Q_z \\ Q_z & -4Q_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_x & 0 \\ R_y & -3{,}2R_z \\ R_z & 3{,}2R_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}$$

On obtient après addition des composantes :

$$\{t_{Ext\to hélico}\}_G = \begin{Bmatrix} 402 + Q_x + R_x & 14{,}25 - 1{,}5Q_y \\ -9{,}5 + Q_y + R_y & 3 + M_{airRQ\to hélico} + 1{,}5Q_x + 4Q_z - 3{,}2R_z \\ 3000 + Q_z + R_z - mg & N_{airRP\to hélico} - 1{,}9 - 4Q_y + 3{,}2R_y \end{Bmatrix}$$

L'équilibre aérodynamique est atteint si et seulement si $\{t_{Ext\to hélico}\}_G = \{0\}$, d'où :

$$\begin{cases} 402 + Q_x + R_x = 0 & [1] \\ -9{,}5 + Q_y + R_y = 0 & [2] \\ 3000 + Q_z + R_z - mg = 0 & [3] \\ 14{,}25 - 1{,}5Q_y = 0 & [4] \\ 3 + M_{airRQ\to hélico} + 1{,}5Q_x + 4Q_z - 3{,}2R_z = 0 & [5] \\ N_{airRP\to hélico} - 1{,}9 - 4Q_y + 3{,}2R_y = 0 & [6] \end{cases}$$

- **Montrer** qu'il est possible de résoudre ce système d'équations (on ne demande pas sa résolution)

Calculons le nombre d'inconnues : $Q_x, Q_y, Q_z, R_x, R_y, R_z$ soit 6 inconnues

Nous connaissons :

$\left\|\vec{M}_{A(airRP\to hélico)}\right\| = 108\ Nm$ donc $N_{airRP\to hélico} = 108$

$\left\|\vec{M}_{B(airRQ\to hélico)}\right\| = 30\ Nm$ donc $M_{airRQ\to hélico} = -30$ (le signe - indique que le vecteur est orienté vers $-\vec{y}$)

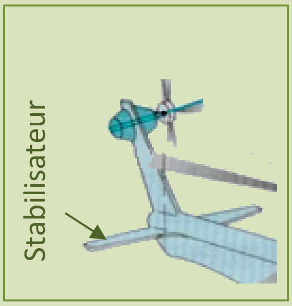
$\left\|\vec{Q}_{(B,airRQ\to hélico)}\right\| = 9{,}5\ daN$ donc $\sqrt{Q_x{}^2 + Q_y{}^2 + Q_z{}^2} = 950\ N \quad [7]$

Déterminons le nombre d'équations : 7 équations (2 équations ne sont pas indépendantes)

Conclusion : le système peut être résolu. L'hélicoptère peut être en situation d'équilibre aérodynamique.

- Quelle action mécanique extérieure n'a pas été prise en compte ?

L'action de l'air sur le stabilisateur n'a pas été prise en compte.



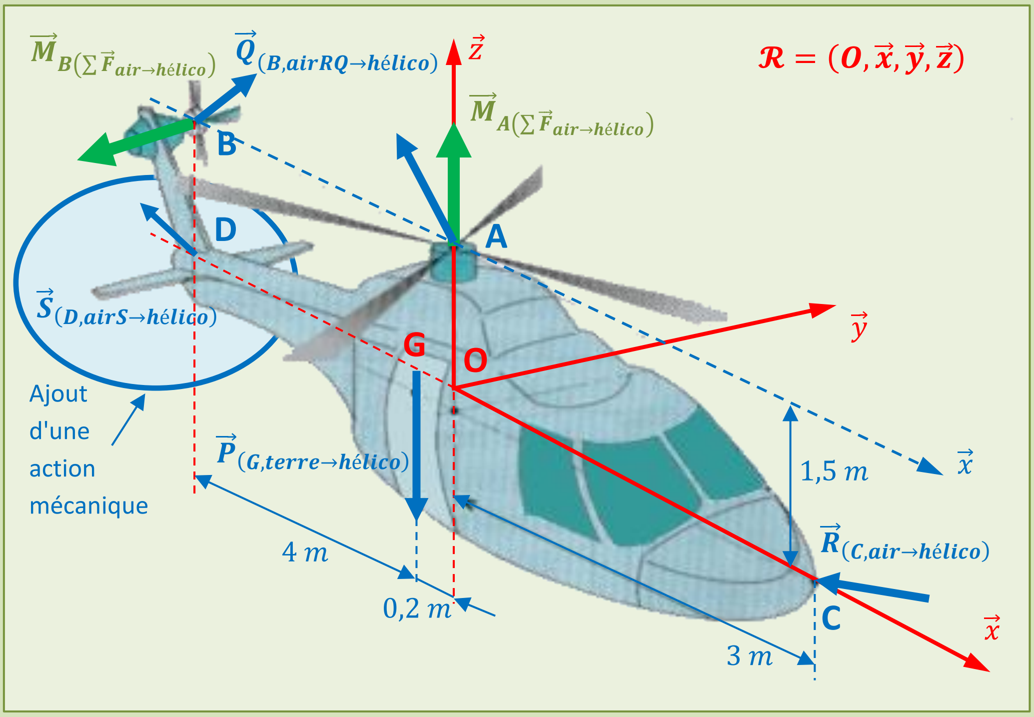
Conclusion

Le torseur est un outil mathématique indispensable lorsque l'on aborde des systèmes complexes, ce qui est généralement le cas dans les situations réelles (en opposition avec les situations pédagogiques où l'objet étudié est simple et de plus, placé dans un environnement simple. Exemple : une échelle adossée à un mur).

On comprend mieux pourquoi la discipline *Mathématique* est essentielle pour la discipline *Sciences de l'Ingénieur*.

Par curiosité, voyons ce qu'apporte la prise en compte d'une action mécanique sur le stabilisateur…

Nous reprenons le modèle et le complétons par le point D et la force $\vec{S}_{(D,airS\to hélico)}$. *a priori*, il n'y a pas de raison pour que le stabilisateur crée un moment en D.



Écrivons le torseur de l'action mécanique au point D :

$$\{t_{airS \rightarrow hélico}\}_D = \underset{D}{\begin{Bmatrix} \vec{S}_{(D,airS \rightarrow hélico)} \\ \vec{M}_{D(\vec{S}_{airS \rightarrow hélico})} \end{Bmatrix}}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \underset{D}{\begin{Bmatrix} S_x & 0 \\ S_y & 0 \\ S_z & 0 \end{Bmatrix}}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Déplaçons le torseur au point G :

$$\{t_{airS \rightarrow hélico}\}_G = \underset{G}{\begin{Bmatrix} \vec{S}_{(D,airS \rightarrow hélico)} \\ \vec{M}_{D(\vec{S}_{airS \rightarrow hélico})} + \overrightarrow{GD} \wedge \vec{S}_{(D,airS \rightarrow hélico)} \end{Bmatrix}}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Calculons $\vec{M}_{D(\vec{S}_{airS \rightarrow hélico})} + \overrightarrow{GD} \wedge \vec{S}_{(D,airS \rightarrow hélico)}$:

$$\vec{M}_{D(\vec{S}_{airS \rightarrow hélico})} + \overrightarrow{GD} \wedge \vec{S}_{(D,airS \rightarrow hélico)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4S_z \\ -4S_y \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\{t_{airS \rightarrow hélico}\}_G = \begin{Bmatrix} S_x & 0 \\ S_y & 4S_z \\ S_z & -4S_y \end{Bmatrix}$$

Intégrons ce nouveau torseur mécanique dans le calcul de $\{t_{Ext \rightarrow hélico}\}_G$:

$$\{t_{Ext \rightarrow hélico}\}_G = \begin{Bmatrix} 402 + Q_x + R_x & 14,25 - 1,5Q_y \\ -9,5 + Q_y + R_y & 3 + 1,5Q_x + 4Q_z - 3,2R_z \\ 3000 + Q_z + R_z - mg & -1,9 - 4Q_y + 3,2R_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_x & 0 \\ S_y & 4S_z \\ S_z & -4S_y \end{Bmatrix}$$

$$\{t_{Ext \rightarrow hélico}\}_G = \begin{Bmatrix} 402 + Q_x + R_x + S_x & 14,25 - 1,5Q_y \\ -9,5 + Q_y + R_y + S_y & 3 + 1,5Q_x + 4Q_z - 3,2R_z + 4S_z \\ 3000 + Q_z + R_z - mg + S_z & -1,9 - 4Q_y + 3,2R_y - -4S_y \end{Bmatrix}$$

Pour répondre à l'équilibre aérodynamique, on doit avoir :

$$\begin{cases} 402 + Q_x + R_x + S_x = 0 \\ -9,5 + Q_y + R_y + S_y = 0 \\ 3000 + Q_z + R_z - mg + S_z = 0 \\ 14,25 - 1,5Q_y = 0 \\ 3 + 1,5Q_x + 4Q_z - 3,2R_z + 4S_z = 0 \\ -1,9 - 4Q_y + 3,2R_y - -4S_y = 0 \end{cases}$$

Le nombre d'inconnues est maintenant de 9.

Le nombre d'équations est de 6 mais nous avons des données supplémentaires :

$$\|\vec{R}_{(C,air \rightarrow hélico)}\| = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2 + {R_z}^2} = 402\ daN$$

$$\|\vec{Q}_{(B,airRQ \rightarrow hélico)}\| = \sqrt{{Q_x}^2 + {Q_y}^2 + {Q_z}^2} = 9,5\ daN$$

Et deux autres données concernant les modules de moments (moments qu'il faut préalablement calculer…)